EQUATIONS DE BRESSE

1 OBJECTIF

Soit G_0G_1 une poutre droite et (G_0,x,y,z) un **repère local lié à la poutre**.

Soit G le centre de gravité de la section Σ de la poutre à l'abscisse x.

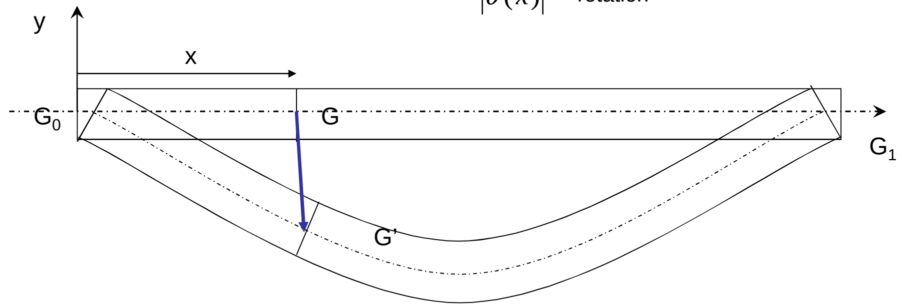
La poutre est chargée => N(x), $T_y(x)$ et $M_z(x)$.

On cherche à déterminer les déplacements de G(x) sous l'effet du chargement.

On détermine les composantes du déplacement du point G se transformant en G' après chargement. Composantes dans le repère local :

$$\overrightarrow{GG'}\begin{vmatrix} u(x) \\ v(x) \\ \theta(x) \end{vmatrix}$$

- translation horizontale
- translation verticale
- rotation



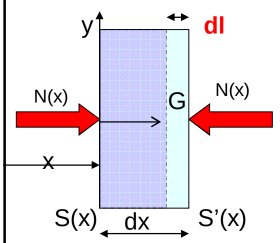
On suppose également que le point G_0 subit des déplacements u_0, v_0 et θ_0 supposés connus.

EQUATIONS DE BRESSE

1 OBJECTIF

Les déplacements sont obtenus par sommation (intégration) des déformations élémentaires des petits tronçons de poutre, de longueur dx.

Effet de N(x)

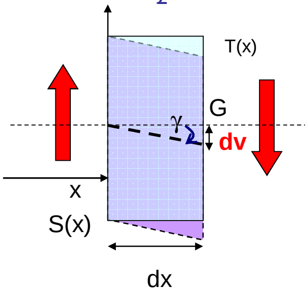


déplacement de S'(x) par rapport à S(x)

$$\boxed{\sigma(y) = \frac{N}{S}}$$

$$\boxed{\varepsilon(x) = \frac{dl}{dx} = -\frac{N(x)}{ES(x)}}$$

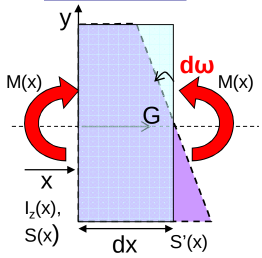
Effet de $T_y(x)$



$$\boxed{\tau(y) = \frac{T}{I_z}\frac{m(y)}{b(y)}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{dv}{dx} = -\frac{T}{GS_1}}$$

Effet de M(x)



$$\boxed{\sigma(y) = \frac{M_z(x)}{I_z(x)} \times y}$$

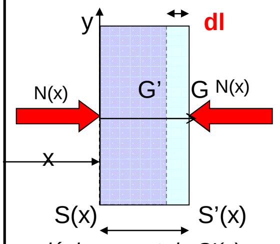
$$\boxed{\frac{d\omega(x)}{dx} = \frac{M_z(x)}{EI_z(x)}}$$

EQUATIONS DE BRESSE

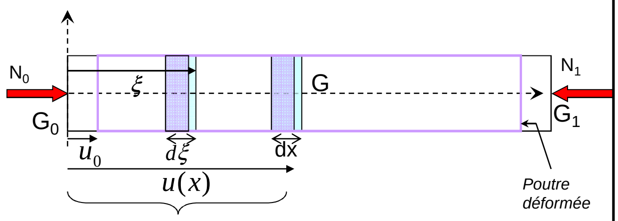
2 EFFET DE N(x)

Les déplacements sont obtenus par sommation (intégration) des déformations élémentaires des petits tronçons de poutre, de longueur dx.

Effet de N(x)



déplacement de S'(x) par rapport à S(x)



Déplacement de G : somme des raccourcissements de tous les tronçons dx compris entre G_0 et G

$$\varepsilon(x) = \frac{dl}{dx} = -\frac{N(x)}{ES(x)}$$

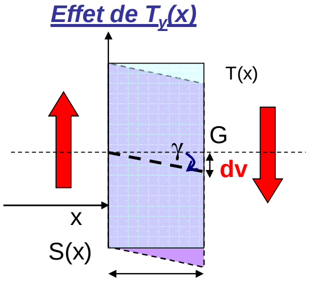
$$u(x) - u_0 = \int_0^x dl(\xi) = \int_0^x \varepsilon(\xi)d\xi = -\int_0^x \frac{N(\xi)}{E(\xi)S(\xi)}d\xi$$

EQUATIONS DE BRESSE

3 EFFET DE T(x)

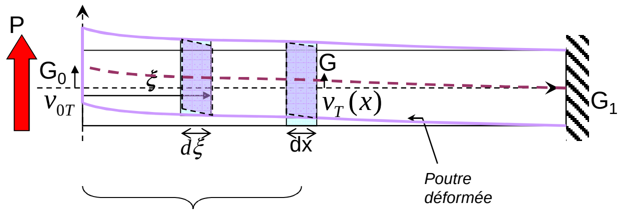
Les déplacements sont obtenus par sommation (intégration) des déformations élémentaires des petits tronçons de poutre, de longueur dx.

Effet de T_y(x)



dx

déplacement de S'(x) par rapport à S(x)



Déplacement de G : somme des déformations de tous les tronçons dx compris entre G_0 et G

$$v_T(x) - v_{0T} = -\int_0^x \frac{T(\xi)}{G(\xi)S_r(\xi)}d\xi$$

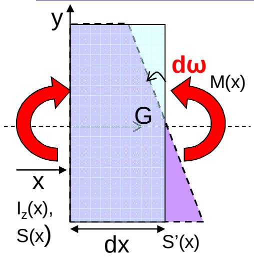
$$\gamma(x) = \frac{dv(x)}{dx} = -\frac{T(x)}{GS_r}$$

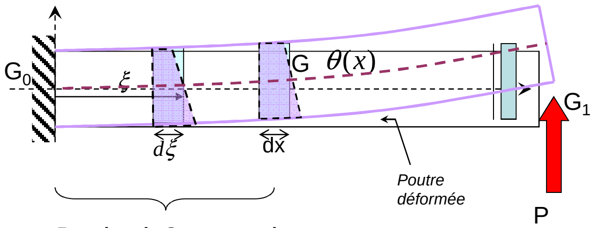
EQUATIONS DE BRESSE

4 EFFET DE M(x)

Les déplacements sont obtenus par sommation (intégration) des déformations élémentaires des petits tronçons de poutre, de longueur dx.

1er effet de M(x): rotation





Rotation de G : somme des rotations de tous les tronçons dx compris entre G_0 et G

$$\boxed{\frac{d\omega(x)}{dx}=\frac{M_z(x)}{EI_z(x)}}$$

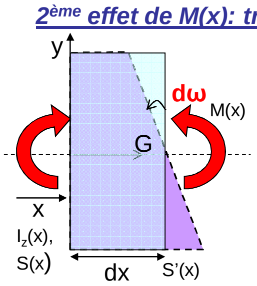
$$\boxed{\theta(x)-\theta_0=\int_0^x d\omega(\xi)=\int_0^x\frac{M(\xi)}{E(\xi)S(\xi)}d\xi}$$

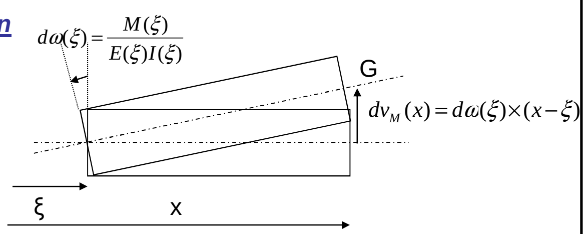
EQUATIONS DE BRESSE

4 EFFET DE M(x)

Les déplacements sont obtenus par sommation (intégration) des déformations élémentaires des petits tronçons de poutre, de longueur dx.

2ème effet de M(x): translation





La rotation de la section Σ(ξ) entraîne une translation verticales de toutes les sections Σ(x) situées en aval (x> ξ).

$$dv_M(x)=d\omega(\xi)\times(x-\xi)=\frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}\times(x-\xi)$$

$$\boxed{\frac{d\omega(x)}{dx}=\frac{M_z(x)}{EI_z(x)}}$$

$$\boxed{v_M(x)-v_{M0}=\theta_0 x+\int_0^x\frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(x-\xi)d\xi}$$

EQUATIONS DE BRESSE

6 EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA DEFORMEE

On peut montrer que les déformations dues à T(x) sont négligeables devant celles dues à M(x)

$$v(x) \approx v_0 + \theta_0 x + \int_0^x \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(x-\xi)d\xi$$

$$v'(x) = \frac{dv(x)}{dx} \approx \theta_0 + \int_0^x \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}d\xi = \theta(x)$$

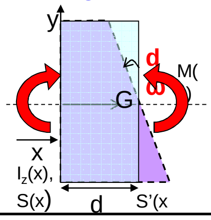
$$\boxed{v''(x) = \frac{d^2v(x)}{dx^2} = \frac{M(x)}{E(x)I(x)}}$$

Dans le cas de poutres simples où deux conditions de déformations aux limites sont connues, il est plus pratique de partir de l'équation différentielle et de l'intégrer 2 fois.

Rem : on retrouve le résultat vu précédemment :

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{M(x)}{E(x)I(x)} = \frac{1}{R(x)} = \frac{v''(x)}{\left(1+v'(x)^2\right)^{3/2}} \approx v''(x)$$ R(x) = rayon de courbure

Les déformées v(x) étant de faible amplitude, les dérivées v'(x) sont faibles.

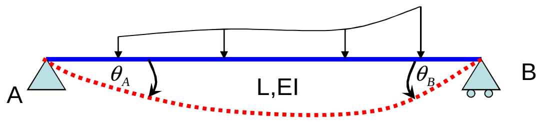


EQUATIONS DE BRESSE

7 DEFORMEE D'UNE POUTRE DROITE

• Poutre sur 2 appuis simples – sans moment aux extrémités

Poutre de longueur L, module E, inertie I (éventuellement variable), soumise à un moment M(x).



$$v(L) = \theta_A L + \int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(L-\xi)d\xi = 0 \Rightarrow \quad \boxed{\theta_A = -\int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(1-\frac{\xi}{L})d\xi}$$

$$\theta_B = v'(L) = \theta_A + \int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}d\xi \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = \int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}\frac{\xi}{L}d\xi}$$

$$\theta(x) = v'(x) = \theta_A + \int_0^x \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}d\xi = -\int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(1-\frac{\xi}{L})d\xi + \int_0^x \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}d\xi$$

$$v(x) = \theta_A x + \int_0^x \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(x-\xi)d\xi = -\int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(1-\frac{\xi}{L})x d\xi + \int_0^x \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(x-\xi)d\xi$$

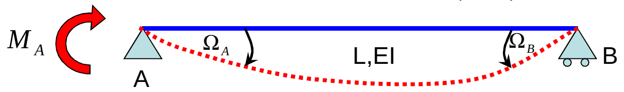
EQUATIONS DE BRESSE

7 DEFORMEE D'UNE POUTRE DROITE

• Poutre sur 2 appuis simples – influence d'un moment en A

Poutre de longueur L, module E, inertie I (éventuellement variable), soumise à un moment M_A.

Expression du moment dans la barre : $M(x) = M_A\left(1-\frac{x}{L}\right)$



$$\Omega_A = -\int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(1-\frac{\xi}{L})d\xi \Rightarrow \boxed{\Omega_A = -\int_0^L \frac{M_A}{E(\xi)I(\xi)}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)^2 d\xi = -aM_A}$$

$$\Omega_B = \int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}\frac{\xi}{L}d\xi \Rightarrow \boxed{\Omega_B = \int_0^L \frac{M_A}{E(\xi)I(\xi)}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\frac{\xi}{L}d\xi = bM_A}$$

a, b sont appelés coefficients de souplesse.

Si EI=cte : $a = \frac{L}{3EI}$ et $b = \frac{L}{6EI}$

EQUATIONS DE BRESSE

7 DEFORMEE D'UNE POUTRE DROITE

• Poutre sur 2 appuis simples – influence d'un moment en B

Poutre de longueur L, module E, inertie I (éventuellement variable), soumise à un moment M_B.

Expression du moment dans la barre : $M(x) = M_B\left(\frac{x}{L}\right)$

$$\Omega_A = -\int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(1-\frac{\xi}{L})d\xi \Rightarrow \boxed{\Omega_A = -\int_0^L \frac{M_B}{E(\xi)I(\xi)}\left(1-\frac{\xi}{L}\right)\frac{\xi}{L}d\xi = -bM_B}$$

$$\Omega_B = \int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}\frac{\xi}{L}d\xi \Rightarrow \boxed{\Omega_B = \int_0^L \frac{M_B}{E(\xi)I(\xi)}\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 d\xi = cM_B}$$

c est un coefficient de souplesse.

Si EI = cte : $c = \frac{L}{3EI}$

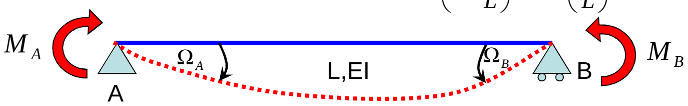
EQUATIONS DE BRESSE

7 DEFORMEE D'UNE POUTRE DROITE

- ***Poutre sur 2 appuis simples – influence de moments en A et B***

Poutre de longueur L, module E, inertie I (éventuellement variable), soumise aux moments M_A et M_B aux extrémités.

Expression du moment dans la barre : $M(x) = M_A\left(1-\dfrac{x}{L}\right) + M_B\left(\dfrac{x}{L}\right)$



$$\Omega_A = -\int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}(1-\frac{\xi}{L})d\xi \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_A = -aM_A - bM_B}$$

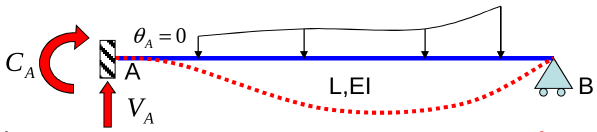
$$\Omega_B = \int_0^L \frac{M(\xi)}{E(\xi)I(\xi)}\frac{\xi}{L}d\xi \Rightarrow \quad \boxed{\Omega_B = bM_A + cM_B}$$

On applique le principe de superposition

EQUATIONS DE BRESSE

8 RESOLUTION DE STRUCTURES HYPERSTATIQUES

- **Poutre à 1 travée encastrée - appuyée**



h=1 : les équations de la statique ne suffisent pas. <u>**On trouve les équations complémentaires en raisonnant sur les déformations de la poutre.**</u>

2 méthodes :

- <u>*Méthode directe*</u> : $M(x) = V_A x + C_A + m(x) = EIv''(x)$

Où $m(x)$ est le moment provoqué par le chargement sur la poutre à la coupure en x (hors réactions d'appui).

$$EIv'(x) = V_A\frac{x^2}{2} + C_A x + f(x) + \underbrace{EIv'(0)}_{=0}$$ avec $f(x) = \int m(x)$ Primitive de $m(x)$

$$EIv(x) = V_A\frac{x^3}{2.3} + C_A\frac{x^2}{2} + g(x) + \underbrace{EIv(0)}_{=0}$$ avec $g(x) = \int f(x)$

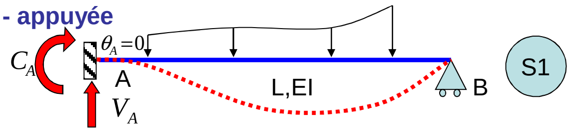
$$\left.\begin{aligned} &EIv(L) = 0 \Rightarrow V_A\frac{L^3}{2.3} + C_A\frac{L^2}{2} + g(L) = 0 \\ &M(L) = 0 \Rightarrow V_A L + C_A + m(L) = 0 \end{aligned}\right\}$$

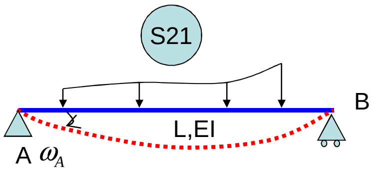
2 équations à 2 inconnues V_A et C_A, que l'on résout, ce qui permet de déterminer M(x)

EQUATIONS DE BRESSE

8 RESOLUTION DE STRUCTURES HYPERSTATIQUES

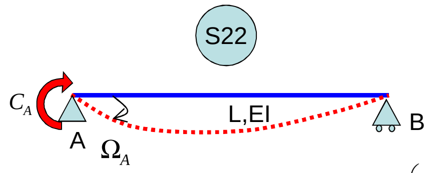
- **Poutre à 1 travée encastrée - appuyée**
  - *Méthode de superposition* :





Moment dans la poutre iso : $\mu(x)$

$$\omega_A = -\int_0^L \frac{\mu(x)}{E(x)I(x)}(1-\frac{x}{L})dx$$



Moment dans la poutre iso : $M_{22}(x) = C_A\left(1-\frac{x}{L}\right)$

$$\Omega_A = -\int_0^L \frac{M_{22}(x)}{E(x)I(x)}(1-\frac{x}{L})dx = -aC_A$$

S1 = S21 + S22 ⬄ déformées identiques => rotation nulle en A

$$\theta_A = \omega_A - aC_A = 0 \Rightarrow C_A = \frac{\omega_A}{a} = -\frac{\int_0^L \frac{\mu(x)}{EI(x)}\left(1-\frac{x}{L}\right)dx}{\int_0^L \frac{1}{EI(x)}\left(1-\frac{x}{L}\right)^2 dx}$$

Puis la nullité du moment en B permet de calculer V_A

$$M(L) = 0 \Rightarrow V_A L + C_A + m(L) = 0$$